

Prosiding
Seminar Nasional
Matematika dan Pendidikan Matematika 2013

Semnastika Unesa 2013

**KURIKULUM 2013, APLIKASI DAN
PERANNYA DALAM MENANAMKAN
NILAI-NILAI MATEMATIKA**

Surabaya, 18 Mei 2013

Jurusan Matematika
FMIPA
Gedung C-1 Kampus Ketintang Surabaya
Telp : (031) 8297677
Email : semnastika2013unesa@yahoo.co.id

Universitas Negeri Surabaya

Diterbitkan Oleh: Unesa

SIMULASI PENGENDALIAN GERAK ROBOT MOBIL BERPENGGERAK DIFFERENSIAL BERDASARKAN METODE u, ω <i>TRACKING CONTROL</i> BERBASIS <i>PROPORTIONAL DERIVATIVE</i>	1
AHMAD ZAENAL ARIFIN¹, SUBCHAN²	1
PREDIKSI INTERVAL BAYESIAN BAGI WAKTU HIDUP SISA KOMPONEN KE- n BERDISTRIBUSI PARETO PADA KASUS PARAMETER SKALA DIKETAHUI	12
AKHMAD FAUZY	12
INTERVAL KONFIDENSI UNTUK DUA PARAMETER DISTRIBUSI EKSPONENSIAL DI BAWAH SENSOR TIPE-II (STUDI KASUS DATA WAKTU TUNGGU GEMPABUMI BESAR DI INDONESIA)	21
AKHMAD FAUZY¹ DAN ANGARA SETYABAWANA PUTRA²	21
SELANG BAGI FUNGSI TAHAN HIDUP MASA TAHANAN ANGGOTA DPR YANG TERSANGKUT KORUPSI (DATA BERDISTRIBUSI EKSPONENSIAL SATU PARAMETER TERSENSOR TIPE-II)	28
AKHMAD FAUZY¹ DAN RITA MUSTIKA²	28
PELUANG BERTAHAN PERUSAHAAN ASURANSI DARI KEBANGKRUTAN PADA WAKTU KEDATANGAN KLAIM BERDISTRIBUSI GAMMA($2, \beta$)	35
ALI SHODIQIN	35
SINKRONISASI SISTEM <i>CHAOS</i> DENGAN PEMBANGKIT <i>SKEW TENT MAP</i>	48
ARIS ALFAN¹, YUSUF FUAD²	48
ANALISIS KESTABILAN MODEL POPULASI MANGSA PEMANGSA DENGAN RESPON FUNGSIONAL HOLLING	57
DIAN SAVITRI1	57
PEMBAGIAN KELAS MATA KULIAH TERSTRUKTUR ANALISIS REAL I UNTUK MAHASISWA PRODI MATEMATIKA ANGKATAN 2010 DENGAN METODE <i>SUBTRACTIVE CLUSTERING</i>	67
DWI NUR YUNIANI	67
PEMODELAN JADWAL KEBERANGKATAN PESAWAT TRANSIT DI BANDARA DENGAN MENGGUNAKAN ALJABAR MAXPLUS	76
DYAH ARUM ANGGRAENI¹, SUBCHAN², SUBIONO³	76
SOLUSI SOLITON DARI PERSAMAAN KORTEWEG DE VRIES (KdV)	85
EKA PRAMYTASARI¹, ABADI²	85
PEMBUAT	94
AN TANDA TANGAN DIGITAL MENGGUNAKAN DIGITAL SIGNATURE ALGORITHM	94
FAIZAH NURHASANAH, R.SULAIMAN	94
APLIKASI METODE MPC PADA PERMASALAHAN <i>SHIP HEADING CONTROL</i> DI LAUT HOMOGEN	106
FAUZIYAH, SUBCHAN, ERNA	106
PEMODELAN MATEMATIKA DAN <i>STOCHASTIC GOAL PROGRAMMING</i> PADA OPTIMASI PENDISTRIBUSIAN BAHAN BAKAR MINYAK JENIS PREMIUM	116
GALUH OKTAVIA SISWONO¹, SUBCHAN², LAKSMI PRITA W.³	116
MODEL SPLINE DENGAN FUNGSI BASIS <i>TRUNCATED</i> UNTUK NILAI UJIAN MATA KULIAH PENGANTAR STATISTIKA MATEMATIS II	124
HARMI SUGIARTI¹	125

MULTI DIMENSI SCALING	133
HERY TRI SUTANTO	133
KARAKTERISASI FLUIDA SISO PADA APLIKASI PROSES PENGAWETAN MAKANAN.....	143
IKA HESTI AGUSTIN¹, BASUKI WIDODO²	143
IMPLEMENTASI ALJABAR MAX-PLUS PADA PEMODELAN DAN PENJADWALAN KEBERANGKATAN BUS KOTA DAMRI (STUDI KASUS DI SURABAYA)	152
KRESNA OKTAFIANTO¹, SUBIONO², SUBCHAN³	152
PELABELAN (A, D) - C_6 -ANTI AJAIB SUPER PADA GRAF TANGGA	160
LILIEK SUSILOWATI.....	160
KEKONTINUAN MUTLAK SUATU FUNGSI BERNILAI REAL DENGAN PENDEKATAN SELANG- δ DASAR.....	168
MANUHARAWATI	168
KRIPTOGRAFI CIPHER HILL DIPERLUAS	177
MUKHAMMAD SOLIKHIN¹, DWI JUNIATI²	177
UKURAN BERTANDA	187
RENI RATNA SARI¹, MANUHARAWATI²	187
PERSAMAAN SCHRÖDINGER PADA DUA ATOM HIDROGEN DENGAN GAYA TARIK MUTUAL ...	196
SHANDY LAVENDA¹, YUSUF FUAD²	196
PENDEKATAN SYSTEM DYNAMICS DALAM UPAYA PENGENDALIAN KETIMPANGAN SPASIAL PEMBANGUNAN DI KABUPATEN PROBOLINGGO.....	204
SOMAN WISNU DARMA¹, ISPURWONO SUMARNO², DANIELS M ROSYID³	204

Kekontinuan Mutlak Suatu Fungsi Bernilai Real dengan Pendekatan Selang- δ Dasar

Manuharawati

Jurusan Matematika FMIPA Unesa Surabaya

manuhara1@yahoo.co.id

Abstrak

Melalui sistem selang- δ dasar, dibangun konsep kekontinuan mutlak suatu fungsi bernilai real yang selanjutnya disebut kontinu- δ mutlak. Selanjutnya dibuktikan bahwa himpunan semua fungsi kontinu- δ mutlak pada himpunan $X \subset [a, b]$ pada $\mathbb{R}$ merupakan ruang linear.

1. Pendahuluan

Konsep kekontinuan mutlak suatu fungsi mempunyai banyak peranan, terutama dalam integral deskriptif ataupun dalam fungsi distribusi frekuensi. Berbagai pendekatan telah banyak dilakukan oleh para ahli matematika dalam membahas integral, seperti Soeparna (1983; 1991), Jain dan Gupta (1986), Lee P.Y (1989). Hal ini dilakukan oleh pakar matematika agar pengguna matematika (khususnya pengguna integral) dapat memilih bentuk yang sesuai dengan kebutuhan yang diinginkan.

Banyak jenis integral yang pembahasannya menggunakan jumlah Riemann dan juga secara deskriptif. Konsep kekontinuan suatu fungsi merupakan dasar dalam pembahasan integral secara deskriptif. Mengingat pentingnya peranan konsep kekontinuan suatu fungsi, makalah ini akan membangun konsep kekontinuan fungsi bernilai real melalui pendekatan selang- δ dasar yang telah dibangun oleh Soeparna Darmawijaya pada tahun 1991. Selanjutnya dibuktikan bahwa himpunan fungsi kontinu mutlak tersebut merupakan ruang linear.

2. Teori Dasar

Untuk membangun konsep kekontinuan- δ dasar diperlukan konsep selang- δ dasar. Adapun konsep selang- δ dasar yang digunakan mengikuti konsep sistem selang- δ dasar yang telah dibangun oleh Soeparna Darmawijaya pada penelitiannya tahun 1991 yang diuraikan sebagai berikut.

Diberikan selang $[a, b]$ pada $\mathbb{R}$ dan fungsi positif δ pada $[a, b]$. Untuk setiap $x \in [a, b]$ dibentuk himpunan $D_x = (u, v)$ dengan sifat

$$x - \delta(x) \leq u < x < v \leq x + \delta(x).$$

Himpunan D_x tersebut disebut selang- δ dasar di x atau selang- δ dasar titik x . Selanjutnya koleksi semua selang- δ dasar titik x disebut sistem selang- δ titik x , yang dinotasikan dengan $\mathcal{D}_x$. Mudah dipahami bahwa untuk setiap $x \in [a, b]$, $\mathcal{D}_x \neq \emptyset$ dan memenuhi sifat-sifat berikut (Soeparna, 1991: 4).

A1. Untuk setiap $D_x \in \mathcal{D}_x$ dan $s < x < t$ berlaku $D_x \cap (s, t) \in \mathcal{D}_x$.

A2. Jika $D'_x, D''_x \in \mathcal{D}_x$, maka $D'_x \cap D''_x \in \mathcal{D}_x$.

A3. Jika A himpunan indeks dan $D_x^\alpha \in \mathcal{D}_x$ untuk setiap $\alpha \in A$, maka

$$\bigcup_{\alpha \in A} D_x^\alpha \in \mathcal{D}_x.$$

A4. Untuk setiap $D_x \in \mathcal{D}_x$, D_x memuat x dan ada $s, t \in D_x$ dengan $s < x < t$.

A5. Jika $D_x \in \mathcal{D}_x$, $u \in D_x$ dan $u < x$, maka ada $u_1 \in D_x$ dengan $u < u_1 < x$ dan jika $v \in D_x$ dengan $x < v$, maka ada $v_1 \in D_x$ dengan $x < v_1 < v$.

3. Pembahasan

Dengan mengacu pada selang- δ dasar tersebut dibangun konsep kekontinuan mutlak relatif terhadap selang- δ dasar yang disebut kontinu- δ mutlak. Selanjutnya dibuktikan bahwa himpunan fungsi kontinu- δ mutlak pada himpunan $X \subset [a, b]$ merupakan ruang linear.

Definisi C1: Diberikan fungsi positif $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, fungsi $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dan $X \subset [a, b]$.

(a) Fungsi F dikatakan kontinu- δ mutlak lemah (weakly absolutely δ -continuous) pada himpunan X jika untuk sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan real $\gamma > 0$ sehingga untuk setiap barisan (x_i) , $x_i \in X$ terdapat barisan selang- δ dasar yang tidak tumpang tindih (D_{x_i}) , $D_{x_i} \in \mathcal{D}_{x_i}$ sehingga jika $u_i \in D_{x_i} \cap X$ dengan $\sum_i |x_i - u_i| < \gamma$ berlaku

$$\sum_i |F(x_i) - F(u_i)| < \varepsilon.$$

Himpunan semua fungsi yang kontinu- δ mutlak lemah pada himpunan $X \subset [a, b]$ dinotasikan dengan $AC(X)$.

(b) Fungsi F dikatakan kontinu- δ mutlak lemah teritlak (generalized weakly absolutely δ -continuous) pada himpunan X jika terdapat barisan himpunan (X_i) sehingga $X = \bigcup_i X_i$ dan untuk setiap i berlaku $F \in AC_\delta(X_i)$. Himpunan semua fungsi yang

kontinu- δ mutlak lemah teritlak pada himpunan $X \subset [a, b]$ dinotasikan dengan $ACG_\delta(X)$.

Definisi C2: *Diberikan fungsi positif $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, fungsi $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dan $X \subset [a, b]$.*

- (a) *Fungsi F dikatakan kontinu- δ mutlak kuat (strongly absolutely δ -continuous) pada himpunan X jika untuk sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan real $\gamma > 0$ sehingga untuk setiap barisan (x_i) , $x_i \in X$ terdapat barisan selang- δ dasar yang tidak tumpang tindih (D_{x_i}) , $D_{x_i} \in \mathcal{D}_{x_i}$ sehingga jika $u_i \in D_{x_i} \cap X$ dengan $\sum_i |x_i - u_i| < \gamma$ berlaku*

$$\sum_i \omega(F; [a_i, b_i]) < \varepsilon$$

dengan $a_i = \min\{x_i, u_i\}$ dan $b_i = \max\{x_i, u_i\}$.

Himpunan semua fungsi yang kontinu- δ mutlak kuat pada himpunan $X \subset [a, b]$ dinotasikan dengan $AC_\delta^(X)$.*

- (b) *Fungsi F dikatakan kontinu- δ mutlak kuat teritlak (generalized strongly absolutely δ -continuous) pada himpunan X jika terdapat barisan himpunan (X_i) sehingga $X = \bigcup_i X_i$ dan untuk setiap i berlaku $F \in AC_\delta^*(X_i)$. Himpunan semua fungsi yang kontinu- δ mutlak kuat teritlak pada himpunan $X \subset [a, b]$ dinotasikan dengan $ACG_\delta^*(X)$.*

Beberapa sifat dari kekontinuan- δ mutlak dari suatu fungsi tertuang di dalam teorema berikut.

Teorema C1: *Diberikan fungsi $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dan himpunan $X \subset [a, b]$. Jika $F \in AC_\delta^*(X)$, maka $F \in ACG_\delta(X)$.*

Bukti: Diberikan sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$. Karena $F \in AC_\delta^*(X)$, maka ada bilangan real $\gamma > 0$, sehingga untuk setiap barisan (x_i) , $x_i \in X$ terdapat barisan selang- δ dasar yang tidak tumpang tindih (D_{x_i}) , $D_{x_i} \in \mathcal{D}_{x_i}$ sehingga jika $u_i \in D_{x_i} \cap X$ dengan $\sum_i |x_i - u_i| < \gamma$ berlaku

$$\sum_i \omega(F; [a_i, b_i]) < \varepsilon$$

dengan $a_i = \min\{x_i, u_i\}$ dan $b_i = \max\{x_i, u_i\}$. Karena untuk setiap i berlaku $x_i, u_i \in [a_i, b_i]$, maka diperoleh

$$\sum_i |F(x_i) - F(u_i)| < \varepsilon.$$

Jadi terbukti bahwa $F \in AC_\delta(X)$. ■

Kebalikan dari Teorema C1 ini belum tentu berlaku. Hal ini dapat ditunjukkan dengan contoh berikut.

Diberikan fungsi $F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dengan rumus

$$F(x) = \begin{cases} 2 & \text{untuk } x \text{ rasional} \\ 0 & \text{untuk } x \text{ irrasional} \end{cases}$$

$Q = \{x \in [0, 1] : x \text{ rasional}\}$ dan $X = [0, 1] - Q$. Diberikan sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, dan sebarang barisan $(x_i), x_i \in X$. Jika δ sebarang fungsi positif pada $[0, 1]$ dan (D_{x_i}) adalah sebarang barisan selang- δ dasar pada $[0, 1]$ dengan $D_{x_i} \in \mathcal{D}_{x_i}$ dan $u_i \in D_{x_i} \cap X$ dengan sifat $\sum_i |x_i - u_i| < \gamma$, maka

$$\sum_i |F(x_i) - F(u_i)| = 0 < \varepsilon.$$

Jadi $F \in AC_\delta(X)$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $F \notin AC_\delta^*(X)$. Jika diambil $a_i = \min\{x_i, u_i\}$ dan $b_i = \max\{x_i, u_i\}$, dan $\varepsilon = 1$, maka diperoleh

$$\sum_i \omega(F; [a_i, b_i]) = \sum_i 2 \geq 1 = \varepsilon.$$

Yang berarti bahwa $F \notin AC_\delta^*(X)$.

Teorema C1 dan contoh di atas memperlihatkan bahwa $AC_\delta^*(X) \subset AC_\delta(X)$ tetapi ada anggota $F \in AC_\delta(X)$ dengan $F \notin AC_\delta^*(X)$.

Jika $F \in AC_\delta(X)$ dan diberi syarat tambahan, yaitu X merupakan selang, maka $F \in AC_\delta^*(X)$. Hal ini ditunjukkan oleh teorema berikut.

Teorema C2: Diberikan fungsi $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dan himpunan $X \subset [a, b]$. Jika $F \in AC_\delta(X)$ dan X merupakan selang, maka $F \in AC_\delta^*(X)$.

Bukti: Diberikan sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$. Karena $F \in AC_\delta^*(X)$, maka ada bilangan real $\gamma > 0$, sehingga untuk setiap barisan (x_i) , $x_i \in X$ terdapat barisan selang- δ dasar yang tidak tumpang tindih (D_{x_i}) , $D_{x_i} \in \mathcal{D}_{x_i}$ sehingga jika $u_i \in D_{x_i} \cap X$ dengan $\sum_i |x_i - u_i| < \gamma$ berlaku

$$\sum_i |F(x_i) - F(u_i)| < \varepsilon. \quad (1)$$

Akibatnya untuk setiap i berlaku

$$|F(x_i) - F(u_i)| < \varepsilon. \quad (2)$$

Dibentuk $a_i = \min \{x_i, u_i\}$ dan $b_i = \max \{x_i, u_i\}$. Karena untuk setiap i berlaku $x_i, u_i \in [a_i, b_i]$, $[a_i, b_i]$ merupakan selang, dan memenuhi (2), maka terdapat $x'_i, y'_i \in [a_i, b_i]$ sehingga

$$F(x_i) = \sup \{F(x) : x \in [a_i, b_i]\}$$

$$F(y_i) = \inf \{F(x) : x \in [a_i, b_i]\}.$$

Jika diambil $x'_i = \min\{x_i\}$ dan $y'_i = \max \{x_i, y_i\}$, maka untuk setiap i diperoleh $[x'_i, y'_i] \subset [a_i, b_i]$. Oleh karena itu diperoleh

$$y'_i - x'_i \leq b_i - a_i \leq |x_i - u_i|.$$

Yang berakibat

$$\sum_i (y'_i - x'_i) \leq \sum_i |x_i - u_i| < \gamma.$$

Berdasarkan (1) diperoleh

$$\sum_i |F(x'_i) - F(y'_i)| < \varepsilon.$$

Dengan mengingat pembentukan x'_i dan y'_i , maka diperoleh

$$\sum_i \omega(F; [a_i, b_i]) = \sum_i |F(x'_i) - F(y'_i)| < \varepsilon.$$

Jadi terbukti bahwa $F \in AC_\delta^*(X)$. ■

Dua teorema berikut menjamin bahwa $AC_\delta(X)$ dan $AC_\delta^*(X)$ masing-masing merupakan ruang linear.

Teorema C3: Diberikan fungsi $F, G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dan himpunan $X \subset [a, b]$. Jika $F, G \in AC_\delta(X)$ dan α adalah bilangan real sebarang, maka $F + G \in AC_\delta(X)$ dan $\alpha F \in AC_\delta(X)$.

Bukti: Diberikan sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$. Karena $F, G \in AC_\delta(X)$, maka ada bilangan real γ_1, γ_2 dengan $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$, sehingga untuk setiap barisan (x_i) , $x_i \in X$

terdapat barisan selang- δ dasar yang tidak tumpang tindih (D'_{x_i}) dan (D''_{x_i}) $D'_{x_i}, D''_{x_i} \in \mathcal{D}_{x_i}$ sehingga jika $u_i \in D'_{x_i} \cap X$ dengan $\sum_i |x_i - u_i| < \gamma_1$ berlaku

$$\sum_i |F(x_i) - F(u_i)| < \frac{\varepsilon}{3[\alpha]+2} \quad (3)$$

dan jika $u_i \in D''_{x_i} \cap X$ dengan $\sum_i |x_i - u_i| < \gamma_2$ berlaku

$$\sum_i |G(x_i) - G(u_i)| < \frac{\varepsilon}{3[\alpha]+2}. \quad (4)$$

Jika untuk setiap i dibentuk $D_{x_i} = D'_{x_i} \cap D''_{x_i}$, maka menurut A2, $D_{x_i} \in \mathcal{D}_{x_i}$. Selanjutnya jika $\gamma = \min\{\gamma_1, \gamma_2\}$ dan $u_i \in D_{x_i}$ dengan $\sum_i |x_i - u_i| < \gamma$, maka ketaksamaan (3) dan (4) tetap berlaku. Oleh karena itu diperoleh

$$\begin{aligned} (a) \quad \sum_i |(F+G)(x_i) - (F+G)(u_i)| &= \sum_i |F(x_i) - F(u_i) + G(x_i) - G(u_i)| \\ &\leq \sum_i |F(x_i) - F(u_i)| + \sum_i |G(x_i) - G(u_i)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3[\alpha]+2} + \frac{\varepsilon}{3[\alpha]+2} < \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi $F+G \in AC_\delta(X)$,

$$\begin{aligned} (b) \quad \sum_i |(\alpha F)(x_i) - (\alpha F)(u_i)| &= \sum_i |\alpha F(x_i) - \alpha F(u_i)| \\ &= \sum_i |\alpha| |F(x_i) - F(u_i)| \\ &= |\alpha| \sum_i |F(x_i) - F(u_i)| \\ &< |\alpha| \frac{\varepsilon}{3[\alpha]+2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Jadi $\alpha F \in AC_\delta(X)$. ■

Teorema C4: Diberikan fungsi $F, G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dan himpunan $X \subset [a, b]$. Jika $F, G \in AC_\delta^*(X)$ dan α adalah bilangan real sebarang, maka $F+G \in AC_\delta^*(X)$ dan $\alpha F \in AC_\delta^*(X)$.

Bukti: Diberikan sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$. Karena $F, G \in AC_\delta^*(X)$, maka ada bilangan real γ_1, γ_2 dengan $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$, sehingga untuk setiap barisan (x_i) , $x_i \in X$ terdapat barisan selang- δ dasar yang tidak tumpang tindih (D'_{x_i}) dan (D''_{x_i}) $D'_{x_i}, D''_{x_i} \in \mathcal{D}_{x_i}$ sehingga jika $u_i \in D'_{x_i} \cap X$ dengan $\sum_i |x_i - u_i| < \gamma_1$ berlaku

$$\sum_i \omega(F; [a_i, b_i]) < \frac{\varepsilon}{3[\alpha]+2} \quad (5)$$

dan jika $u_i \in D''_{x_i} \cap X$ dengan $\sum_i |x_i - u_i| < \gamma_2$ berlaku

$$\sum_i \omega(G; [a_i, b_i]) < \frac{\varepsilon}{3[\alpha]+2}. \quad (6)$$

dengan $a_i = \min\{x_i, u_i\}$ dan $b_i = \max\{x_i, u_i\}$.

Jika untuk setiap i dibentuk $D_{x_i} = D'_{x_i} \cap D''_{x_i}$, maka menurut A2, $D_{x_i} \in \mathcal{D}_{x_i}$.

Selanjutnya jika $\gamma = \min\{\gamma_1, \gamma_2\}$, $u_i \in D_{x_i}$ dengan

$$\sum_i |x_i - u_i| < \gamma$$

dan $a_i = \min\{x_i, u_i\}$; $b_i = \max\{x_i, u_i\}$, maka ketaksamaan (5) dan (6) tetap berlaku. Oleh karena itu diperoleh

$$\begin{aligned} (a) \quad \sum_i \omega(F + G; [a_i, b_i]) &\leq \sum_i \omega(F; [a_i, b_i]) + \sum_i \omega(G; [a_i, b_i]) \\ &< \frac{\varepsilon}{3[\alpha]+2} + \frac{\varepsilon}{3[\alpha]+2} < \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi $F + G \in AC_\delta^*(X)$.

$$\begin{aligned} (b) \quad \sum_i \omega(\alpha F; [a_i, b_i]) &= \sum_i |\alpha| \omega(F; [a_i, b_i]) \\ &= |\alpha| \sum_i \omega(F; [a_i, b_i]) \\ &< |\alpha| \frac{\varepsilon}{3[\alpha]+2} < \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi $\alpha F \in AC_\delta^*(X)$. ■

Akibat C1: Diberikan fungsi $F, G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dan himpunan $X \subset [a, b]$. Jika $F, G \in ACG_\delta(X)$ dan α adalah bilangan real sebarang, maka $F + G \in ACG_\delta(X)$ dan $\alpha F \in ACG_\delta(X)$.

Bukti: Karena $F, G \in ACG_\delta(X)$, maka terdapat barisan himpunan (X_i) dan (Y_j) sehingga $X = \bigcup_i X_i = \bigcup_j Y_j$ dan untuk setiap i, j berlaku $F \in AC_\delta(X_i)$ dan $G \in AC_\delta(Y_j)$. Jika untuk setiap i dan j dibentuk

$$X_{i,j} = X_i \cap Y_j$$

maka diperoleh $X = \bigcup_{i,j} X_{i,j}$ dan $F, G \in AC_\delta(X_{i,j})$ untuk setiap i dan j . Berdasarkan Teorema C3, untuk setiap i dan j berlaku $F + G \in AC_\delta(X_{i,j})$ dan $\alpha F \in AC_\delta(X_{i,j})$. Jadi $F + G \in ACG_\delta(X)$ dan $\alpha F \in ACG_\delta(X)$. ■

Akibat C2: Diberikan fungsi $F, G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dan himpunan $X \subset [a, b]$. Jika $F, G \in ACG_\delta^*(X)$ dan α adalah bilangan real sebarang, maka $F + G \in ACG_\delta^*(X)$ dan $\alpha F \in ACG_\delta^*(X)$.

Bukti: Karena $F, G \in ACG_{\delta}^*(X)$, maka terdapat barisan himpunan (X_i) dan (Y_j) sehingga $X = \bigcup_i X_i = \bigcup_j Y_j$ dan untuk setiap i, j berlaku $F \in AC_{\delta}^*(X_i)$ dan $G \in AC_{\delta}^*(Y_j)$. Jika untuk setiap i dan j dibentuk

$$X_{i,j} = X_i \cap Y_j$$

maka diperoleh $X = \bigcup_{i,j} X_{i,j}$ dan $F, G \in AC_{\delta}^*(X_{i,j})$ untuk setiap i dan j . Berdasarkan Teorema C4, untuk setiap i dan j berlaku $F + G \in AC_{\delta}^*(X_{i,j})$ dan $\alpha F \in AC_{\delta}^*(X_{i,j})$. Jadi $F + G \in ACG_{\delta}^*(X)$ dan $\alpha F \in ACG_{\delta}^*(X)$. ■

4. Daftar Pustaka

- Jain, P., K. And Gupta, V.P., 1986, *Lebesgue Measure and Integration*, Wiley Eastern Limited, New Delhi.
- Lee, P. Y., 1989, *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*, Wold Scientific, Singapore.
- Soeparna Darmawijaya, 1983, *The Equivalency Between Special Dendjoy and Henstock Integration*, Research Report, FMIPA UGM, Yogyakarta.
- Soeparna Darmawijaya, 1991, *Integral Dasar Deskriptif*, Laporan Penelitian, FMIPA UGM, Yogyakarta.